

Correction du devoir n°3 - 1 sept

Ex 1: 1) $\frac{40}{100} \times \frac{15}{100} \times 50 = \frac{4 \times 15 \times 5}{100} = \frac{20 \times 15}{20 \times 5} = 3$

(13)

3 filles ont les yeux bleus

2) $\frac{33}{x} = \frac{15}{100} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 33}{15} = \frac{5 \times 20 \times 3 \times 11}{5 \times 3} = 220$

$S = 2204$

3) $3,95 \times 21,02 \approx 4 \times 21 \approx 84$

4) Baisser de 20% puis augmenter de 30% revient à multiplier par

$0,8 \times 1,3 = 1,04 = 1 + 0,04 = 1 + \frac{4}{100}$

2' évolution globale est une augmentation de 4%

Ex 2: $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ et $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$

1) a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient ($x - 1 \neq 0$)

$f = \frac{u}{v} \quad f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x-5) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 3x - 3 - x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2}$

donc $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$

b) $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x^2 - 2x + 2)$

$\Delta = 4 - 8 = -4$

$\Delta < 0$ donc $f'(x) > 0$ du signe de $a = 1$

alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) a) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme de degré 3)

$g'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 5 = x^2 - 6x + 5$

1 est racine évidente

b) $g'(x) = (x-1)(x-5)$

(ou $\Delta = \dots$)

x	-6	-1	5	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		$\nearrow \frac{22}{3}$	$\searrow g(5)$		

$a=1$
 $a>0$

2

$g(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + 5 = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$

$g(5) = \frac{1}{3} \times 5^3 - 3 \times 25 + 5 \times 5 + 5 = \frac{125}{3} - 45 = -10/3$

3) a) $T_A: y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$

$$f'(2) = \frac{4-4+2}{1} = 2 \text{ et } f(2) = \frac{4+6-5}{1} = 5$$

donc $T_A: y = 2(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = 2x + 1$

b) il s'agit de résoudre $g'(x) = 2$
 (deux droites sont parallèles si leurs coefficients directeurs sont égaux)

$$x^2 - 6x + 5 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{+6 - 2\sqrt{6}}{2} = 3 - \sqrt{6} \\ x_2 = 3 + \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Delta = 36 - 12 = 24$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Donc $\mathcal{C}_g$ admet une tangente parallèle à T_A
 en 2 points d'abscisses $3 - \sqrt{6}$ et $3 + \sqrt{6}$

Ex 3: $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$ $(u^3)' = 3u^2 \times u'$

1) a) $f'(x) = 3\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$ 9,75

b) $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ 9,75

2) $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

a) $g = \frac{u}{v}$ $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - (x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}$

donc $g'(x) = \frac{2x - x - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ 1,5

b) $2x\sqrt{x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$ 9,5

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$\nearrow$	

(14,5)

Ex 4: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$

1) a) $y = 2x - 3$ 9,5

2) $P(x) = (x^3 - 3x^2 - 4x + 5) - (2x - 3)$
 $= x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ 9,5

a) $P(1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$ 9,5

donc 1 est racine de P

alors $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ a, b, c?

$= ax^3 + bx^2 + cx$
 $- ax^2 - bx - c$

$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ 9,5

Par identification des coefficients

$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = -6 \\ -c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ -8 + 2 = -6 \text{ vrai} \\ c = -8 \end{cases}$

donc $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8)$ 1

$$b) f(x) = 2x - 3 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x^2 - 2x - 8 = 0 (*)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 4$$

$$(*) x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2 - 6}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{2 + 6}{2} = 4 \end{cases}$$

D coupe $\mathcal{C}_f$ en 3 points

A(-2; -7), B(1; -1) et C(4; 5)

(c)

$a = 1$
 $a > 0$

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$		
$x - 1$	-	-	0	+	+		
$x^2 - 2x - 8$	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

sur $]-\infty; -2]$ et
sur $[1; 4]$

$$P(x) \leq 0$$

$$\text{donc } f(x) \leq 2x - 3$$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{D}$

sur $[-2; 1]$ et sur $[4; +\infty[$, $P(x) \geq 0$

$$\text{donc } f(x) \geq 2x - 3$$

alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$

Ex 5: $f(x) = -3x\sqrt{x}$

1) f est définie sur $[0; +\infty[$, dérivable sur $]0; +\infty[$
comme produit

$$2) f'(x) = -3\sqrt{x} + (-3x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-6\sqrt{x}\sqrt{x} - 3x}{2\sqrt{x}}$$

donc $f'(x) = \frac{-9x}{2\sqrt{x}}$ = sur $f'(x) < 0$ donc

3) en 0 $T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-3x\sqrt{x}}{x} = -3\sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$