

Devoir n° 5 - Suites. 18pt

Ex 1: 1) $C_0 = 5000$ (01/01/2012)

$$C_1 = 5000 + 0,04 \times 5000 + 200 = 5400$$

$$C_2 = 5400 \times 1,04 + 200 = 5816$$

9/8

2) augmenter de 4% revient à $\times (1 + \frac{4}{100})$ soit 1,04
et chaque année on rajoute 200 €
donc $C_{n+1} = 1,04 C_n + 200$ ($n \in \mathbb{N}$)

1,

$$3) \begin{cases} C_1 - C_0 = 400 \\ C_2 - C_1 = 416 \end{cases} \neq \begin{cases} \frac{C_1}{C_0} = \frac{5400}{5000} = 1,08 \\ \frac{C_2}{C_1} = \frac{5816}{5400} \approx 1,077 \end{cases} \neq$$

1,

La suite n' est ni arithmétique, ni géométrique

4) $N_n = C_n + 5000$ ($n \in \mathbb{N}$)

a)
$$\begin{aligned} N_{n+1} &= C_{n+1} + 5000 \\ &= (1,04 C_n + 200) + 5000 \\ &= 1,04 C_n + 5200 \\ &= 1,04 (N_n - 5000) + 5200 \\ &= 1,04 N_n - 5200 + 5200 \\ &= 1,04 N_n \end{aligned}$$

$$N_0 = C_0 + 5000 = 10000$$

(N_n) est une suite géométrique de raison 1,04 de 1^{er} terme $N_0 = 10000$

1,5

b) donc $N_n = N_0 \times q^n = 10000 \times 1,04^n$

et $C_n = N_n - 5000 = 10000 \times 1,04^n - 5000$ ($n \in \mathbb{N}$)

9/8

5) 2020 - 2012 = 8 $C_8 = 10000 \times 1,04^8 - 5000 \approx 8686$
A la fin de l'année 2020, le capital est de 8686 € environ

9/8

6)
$$\begin{aligned} C_{n+1} - C_n &= (10000 \times 1,04^{n+1} - 5000) - (10000 \times 1,04^n - 5000) \\ &= 10000 (1,04^{n+1} - 1,04^n) \\ &= 10000 \times 1,04^n (1,04 - 1) \\ &= 10000 \times 1,04^n \times 0,04 \end{aligned}$$

($n \in \mathbb{N}$)

1,5

$C_{n+1} - C_n > 0$
donc (C_n) est croissante

7) 3. while $C \leq 10000$: D'après la calculatrice
 4. $C = 1,04 * C + 200$ } $C_{10} < 10000$
 5. $m = m + 1$ } $C_{11} > 10000$
 6. return $m + 2012$
 95

Donc c'est à partir de 2023 que le capital dépasse les 10000€

Ex 2: 1) $u_n = -n^2 + 3n + 5$ ($n \in \mathbb{N}$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
 2) $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (1,5)
 3) $w_n = 3^n - 5^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$

Ex 3: 1) Tableau 2 (17)
 2) $u_n = 1 - 3n$ ($n \in \mathbb{N}$)
 $u_{n+1} - u_n = (1 - 3(n+1)) - (1 - 3n) = -3n - 3 + 3n = -3$
 $-3 < 0$ (u_n) est décroissante
 3) $\begin{cases} v_0 = \frac{4}{9} \\ v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$) $v_n > 0$ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{2} > 1$
 donc $v_{n+1} > v_n$
 (v_n) est croissante

4) @ $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0; +\infty[$
 $\Delta = 4 - 4 \times (-1) = 8$ $\alpha = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2}$
 $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$ $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2} (< 0)$
 95

x	0	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

95 $a = -1$
 du signe de a à l'extérieur des racines

Dev n°5 - Suites - 1ère spé maths

3 mars 2026 - 1h30 min

Exercice 1 (9 pts) : Le 1er janvier 2012, on a placé 5000 € à intérêts composés au taux annuel de 4%. (cela signifie que les intérêts ajoutés au capital à chaque nouvelle année représentent 4% du capital de l'année précédente)

Chaque 1er janvier, on place 200 € supplémentaires sur ce compte.

On note $C_0 = 5000$ le capital disponible au 1er janvier de l'année 2012,

et C_n le capital disponible au 1er janvier de l'année 2012 + n .

1. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2 .
2. Justifier que pour tout entier n , on a $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.
3. Justifier que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4. Pour tout entier n , on pose $v_n = C_n + 5000$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - b) En déduire l'expression de v_n puis de C_n en fonction de n .
5. Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020, arrondi à l'euro près.
6. Déterminer le sens de variation de la suite (C_n) .
7. On souhaite déterminer à partir de quelle année, le capital disponible dépassera les 10 000 euros.

Compléter le programme ci-contre afin qu'il réponde à la question.
Recopier les lignes à compléter.

Répondre à la question à l'aide de la calculatrice.

1	<code>n = 0</code>
2	<code>C = 5000</code>
3	<code>while :</code>
4	<code> C =</code>
5	<code> n =</code>
6	<code>return ...</code>

Exercice 2 (1,5 pts) : A l'aide de la calculatrice, donner la limite des suites suivantes :

1. $u_n = -n^2 + 3n + 5$ ($n \in \mathbb{N}$)
2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
3. $w_n = 3^n - 5^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Exercice 3 (7 pts) : Les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = 1 - 3n ; \quad v_0 = \frac{4}{9} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n ; \quad w_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-2	-5	-8	-11
v_n	4/9	2/3	1	3/2	9/4
w_n	0	1/2	1	9/8	1

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.
4. On veut démontrer que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3.
 - a) Etudier le signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0; +\infty[$.
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $w_{n+1} - w_n = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$
 - c) En déduire que si $n \geq 3$ alors $w_{n+1} < w_n$ et conclure.

Exercice 4 (2 pts) : On considère la suite (u_n) définie par :

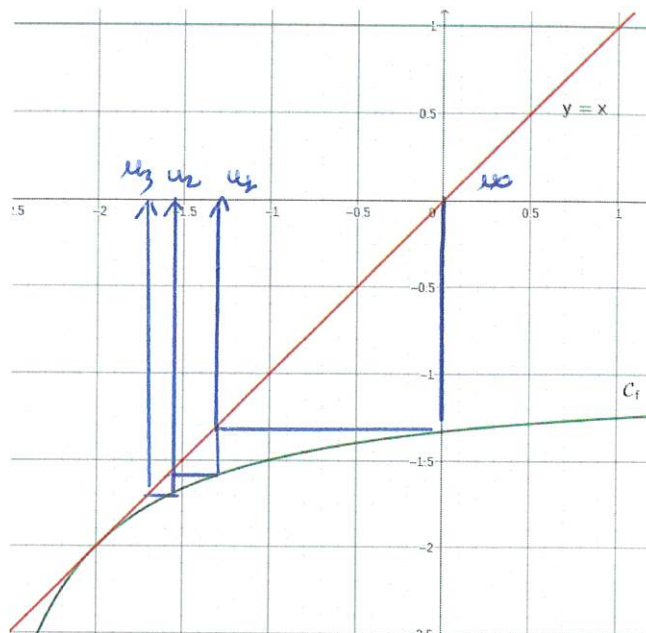
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3} \end{cases} \quad (\text{pour tout entier naturel } n)$$

et la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On donne C_f , la courbe représentative de la fonction f , et la droite D d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

Quelles conjectures peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?



2. **Bonus :** Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$
- Calculer v_0 .
 - Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
 - En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\textcircled{b} \quad \underline{u_m = \frac{m^2}{2^m}} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$u_{m+1} - u_m = \frac{(m+1)^2}{2^{m+1}} - \frac{m^2}{2^m} = \frac{(m+1)^2 - 2m^2}{2^{m+1}}$$

935

$$\text{donc } \underline{u_{m+1} - u_m = \frac{m^2 + 2m + 1 - 2m^2}{2^{m+1}} = \frac{-m^2 + 2m + 1}{2^{m+1}}}$$

$$\textcircled{c} \quad f(x) \leq 0 \text{ pour } x \geq 1 + \sqrt{2} \text{ et } 1 + \sqrt{2} \approx 2,4$$

$$\text{donc } f(m) = -m^2 + 2m + 1 \text{ est négatif pour } m \geq 3$$

1

$$\text{or } 2^{m+1} > 0$$

$$\text{Donc } u_{m+1} - u_m \leq 0 \text{ pour } m \geq 3$$

soit (u_m) décroissante à partir de $m=3$

Ex 4 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \underline{u_{m+1} = \frac{-u_m - 4}{u_m + 3}} \quad (m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

2)

$$\underline{v_m = \frac{1}{u_m + 2}} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{b} \quad v_{m+1} &= \frac{1}{u_{m+1} + 2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{-u_m - 4}{u_m + 3} \right) + 2} \\ &= \frac{1}{\frac{u_m + 2}{u_m + 3}} \\ &= \frac{u_m + 3}{u_m + 2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \underline{v_{m+1} - v_m = \frac{u_m + 3}{u_m + 2} - \frac{1}{u_m + 2} = \frac{u_m + 2}{u_m + 2} = 1} \quad (\text{pour tout } m \in \mathbb{N})$$

$$\textcircled{d} \quad u_m = \frac{1}{m + 0,5} - 2 \quad \text{Par Quotient et somme}$$

$$\underline{\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = -2}$$

1) il semble que (u_m) soit décroissante et converge vers (-2)

$$\textcircled{a} \quad \underline{v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{2}}$$

$\textcircled{c}$ (v_m) est une suite arithmétique de raison $r=1$ de premier terme $v_0 = 1/2$

$$\text{Donc } \underline{v_m = v_0 + mr = \frac{1}{2} + m}$$

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{u_m + 2} \Leftrightarrow \frac{1}{v_m} = u_m + 2 \\ &\Leftrightarrow u_m = \frac{1}{v_m} - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{u_m = \frac{1}{m + 0,5} - 2} \quad (m \in \mathbb{N})$$